Úloha č. 3
Magické formule #1

Zamysli se! – seriálová úloha 10 b

Tato úloha je teoretického rázu, tvým úkolem zde není napsat program v klasickém slova smyslu. Namísto toho se po tobě chce vytvořit „magickou formuli" dle specifikace níže. K formuli také přilož popis myšlenky, na které je založena.

Tato úloha je seriálová, což znamená, že se s magickými formulemi budeš setkávat po celý letošní ročník FIKSu. V každém z následujících kol využiješ znalosti z kol předcházejících.

S bandity za zády se Martien neohlížel a rychle se vydal na cestu. Po chvíli se ale stezka začala ztrácet a uvědomil si, že neví kudy dál. Jak tak bloudil hustým lesem, všiml si mezi stromy malého táboráku. Říkajíc si, že nemá co ztratit, se k němu vydal.

Přikradl se k ohni, kde uviděl osamělého starce u chatrně vypadajícího vozu, jak si opéká malé zvíře připomínající veverku. Přesvědčen, že nepředstavuje žádnou hrozbu, se za ním Martien vydal.

„Co tě ke mně přivádí, mladíku?" zeptal se stařec.

„Ztratil jsem se a hledám cestu do Theorie," odvětil Martien.

„Jo tak do Theorie," uchechtl se stařec, „mladý pán by se rád stal čarodějem, není tomu tak?"

„No a co když?" ohradil se Martien podrážděně. „Potřebuji jenom znát směr a ostatní vás nemusí zajímat."

Stařec jenom unaveně pokroutil hlavou. „Magie, to není jen tak," řekl, „chce to silnou vůli a chytrou mysl, jinak by tě to mohlo zlomit. Pokud na tom ale trváš, dobře. Vyzkouším tedy, zda jsi toho skutečně hoden, a jestli mě přesvědčíš, že máš na to, abys magii zkrotil, ukážu ti cestu."

„Jak myslíte," řekl Martien rezignovaně, „co mám tedy udělat?"

„Uvedu tě do nejzákladnější oblasti magie, psaní magických formulí," odvětil stařec a rozpovídal se…

Psaní magických formulí se řídí přísnými zásadami. Formule samotná je jednou ze tří *konstrukcí,* které se v čarovných runách vyskytují: buďto je předmětem, zaklínadlem nebo aplikací. Pro zachování přehlednosti také lze formuli uzavřít do závorek.

Předmět, to je základní stavební kámen magických formulí. Může to být libovolný znak nebo slovo v latinské abecedě.

Zaklínadlo je činným prvkem formule, začíná vždy pěticípou hvězdou (★) následovanou nějakým předmětem, což tvoří hlavičku zaklínadla. Za hlavičkou pak píšeme tečku (·) a po ní následuje formule tvořící tělo zaklínadla. Princip fungování zaklínadla je jednoduchý:

zaklínadlo Z se aktivuje spolu s nějakou formulí ϕ, říkáme, že ϕ se vloží do Z. Označíme-li předmět v hlavičce zaklínadla Z jako H, při aktivaci zaklínadla Z se nahradí všechny předměty H v těle zaklínadla Z formulí ϕ. Z celého zaklínadla potom zbude toto pozměněné tělo, hlavička a tečka za ní zmizí.

Třetí konstrukcí je *aplikace,* jež má mimo jiné za úkol aktivovat zaklínadla. Skládá se ze dvou formulí ϕ_1 a ϕ_2 napsaných za sebou, přičemž pokud je ϕ_1 zaklínadlem, ϕ_2 se vloží do ϕ_1 při aktivaci formule.

Kvůli přehlednosti a jednoznačnosti zápisu ještě povolíme formuli obalit párem závorek.

Všechny zásady psaní formulí se tedy dají shrnout do tří pravidel:

$$\begin{aligned} [\,\text{formule}\,] &:= [\,\text{předmět}\,] \textit{ nebo } [\,\text{zaklínadlo}\,] \textit{ nebo } [\,\text{aplikace}\,] \textit{ nebo } ([\,\text{formule}\,]) \\ [\,\text{zaklínadlo}\,] &:= \bigstar\ [\,\text{předmět}\,] \cdot [\,\text{formule}\,] \\ [\,\text{aplikace}\,] &:= [\,\text{formule}\,]\,[\,\text{formule}\,] \end{aligned}$$

Lépe je to vidět v praxi. Vezměme následující formuli:

$$(\bigstar\ \text{zvíře}\ \cdot\ \text{jezdec zvíře})\ \text{kůň}$$

Celá formule v tomto případě tvoří aplikaci zaklínadla se zápisem ($\bigstar$ zvíře $\cdot$ jezdec zvíře) na předmět „kůň“. Vyhodnocení aplikací ve formuli se říká redukce. V tomto případě je v hlavičce aplikovaného zaklínadla předmět „zvíře“. Redukci tedy provedeme tak, že všechna zvířata v těle zaklínadla se nahradí koněm a jejím výsledkem bude formule

$$\text{jezdec kůň}$$

V originálním výrazu si také lze povšimnout využití závorek, které slouží k rozlišení formulí napsaných za sebou. Pokud žádné závorky nejsou uvedeny, skládání aplikací je asociativní zleva, což znamená, že formule $a\,b\,c\,d$ se vyhodnotí jako $(((a\,b)\,c)\,d)$.

Zápis se také dá rozšířit o zaklínadla s více předměty v hlavičce. Formálně bychom mohli vytvořit zaklínadlo se dvěma hlavičkovými předměty následovně:

$$\bigstar\ a\ \cdot\ (\bigstar\ b\ \cdot [\,\text{tělo}\,])$$

Tento zápis je značně zdlouhavý a proto zavedeme v zápisu formulí toto zkrácení:

$$\bigstar\ a\,b\ \cdot\ [\,\text{tělo}\,]$$

Nedoporučuje se pojmenovávat předměty ve dvou různých hlavičkách stejně. Pravidlem je, že nadřazená je *vnitřní* hlavička, takže například formule

$$\bigstar\ a\ \cdot\ (\bigstar\ a\ \cdot\ a)\,x\,y$$

se zredukuje na

$$(\bigstar\ a\ \cdot\ a)\,y$$

a pak na y, ale podobný zápis může vést k nepříjemnému zmatku. Také je důležité uvědomit si, že předměty v hlavičce lze (spolu s odpovídajícími předměty v těle) libovolně přejmenovávat. U zaklínadel je rozhodující jejich funkčnost a například formule $\bigstar\ a\,b\ \cdot\ b\,a$ a $\bigstar\ x\,y\ \cdot\ y\,x$ jsou ekvivalentní.

Čarovná čísla

Jedním z nejzákladnějších využití kouzelných formulí je počítání. Mágové v dávných dobách používali k vyjádření čísel předměty pojmenované „1“, „2“ a podobně, ale rychle zjistili že s takovým přístupem není možné vykonávat ani nejjednodušší výpočty. Formule nejsou schopné zpracovat předměty na základě jejich jména, mohou je jenom přesouvat dosazovaním do zaklínadel.

Moderní magie tedy nevyužívá pro čísla předměty, ale zaklínadla. Jako základní příklad uvedu nulu, která se dá definovat jako

$$\mathbf{0} := \bigstar\ a\,b\ \cdot\ b$$

Další čísla definujeme takto:

$$\begin{aligned}\mathbf{1} &:= \bigstar\ a\,b\ \cdot\ a(b)\\ \mathbf{2} &:= \bigstar\ a\,b\ \cdot\ a(a(b))\\ \mathbf{3} &:= \bigstar\ a\,b\ \cdot\ a(a(a(b)))\\ &\dots\end{aligned}$$

Definice vyšších hodnot je pak analogická, u čísla n se n-krát na b aplikuje a.

Kouzelné počty

Jakmile máme definovaná přirozená čísla, můžeme na nich provádět mnoho operací. Jako nejjednodušší se dá uvést zaklínadlo, kterým se pomocí aplikace dá zvýšit libovolné číslo o 1:

$$\mathbf{INC} := \bigstar\ a\,b\,c\ \cdot\ b\,(a\,b\,c)$$

Na levé straně zvyšovacího zaklínadla a čísel je uvedený zkrácený tvar, který se dá použít pro zpřehlednění zápisů. Funkčnost zvyšovacího zaklínadla můžeme demonstrovat na formuli **INC 2**, která by po správnosti měla být ekvivalentní formuli **3**.

$$\mathbf{INC\,2} = (\bigstar\ a\,b\,c\ \cdot\ b\,(a\,b\,c))\ (\bigstar\ x\,y\ \cdot\ x(x(y)))$$

Formuli **2** můžeme dosadit za a v hlavičce zaklínadla **INC**:

$$(\bigstar\ b\,c\ \cdot\ b\,((\bigstar\ x\,y\ \cdot\ x(x(y)))\,b\,c))$$

Pak můžeme vyhodnotit zaklínadlo ve vnitřku, které nyní lze aplikovat na b a c:

$$(\bigstar\ b\,c\ \cdot\ b\,(b(b(c)))$$

A výsledkem je zaklínadlo reprezentující hodnotu **3**.

Ještě zajímavější je, že zaklínadlo INC lze také využít pro sčítání. Kdybychom na něj a jiné číslo, řekněme **2**, aplikovali jiné číslo, například **3**, dostaneme formuli ve tvaru

$$\mathbf{3\,INC\,2}$$

a ta je skutečně ekvivalentní **5**, což se dá podobně snadno ověřit. Princip funkčnosti je ale zřejmý, číslo n je jenom zaklínadlo, které aplikuje první předmět v hlavičce n-krát na druhý. Jestliže tedy do n vložíme **INC** a zaklínadlo reprezentující číslo m, v podstatě n-krát na m aplikujeme zvýšení o 1 a výsledek má tedy číselnou hodnotu $m + n$.

„No dobře, tak řekněme, že už tomu začínám rozumět,“ řekl Martien, potlačuje závrať. „Můžu teď už jít?“

„Ne tak rychle,“ odvětil stařec, „myslíš, že jenom tímhle někoho na akademií oslníš?“

„No, asi jo?“ zkusil to Martien, ale stařec se na něho jen zamračil.

„Tohle tam mají v malíku i ti nejprostější novicové! Jestli chceš znát cestu dál, budeš muset přijít na náročnější úkol, a to jak čarovná čísla násobit,“ řekl stařec.

„Výborně,“ zakoulel očima Martien, „proč ne rovnou odečítat nebo dělit?“.

„Odčítaní není zlý nápad,“ zamyslel se stařec, „ale potřeboval bys k němu celá čísla, ne jenom přirozená. Ale, “ usmál se, „kdybys přišel na způsob, jak reprezentovat celá čísla, šlo by ti to už samo!“

Vypadá to na dlouhou noc, pomyslel si Martien a pustil se do přemýšlení.

Soutěžní úloha

První částí úlohy je navrhnout obecný způsob, jak vynásobit dvě přirozená čísla reprezentovaná zaklínadly. Výsledkem operace tedy musí být jediné zaklínadlo, reprezentující násobek originálních dvou čísel. Řešení také musí obsahovat popis, proč uvedený postup funguje. Za vyřešení této části lze získat až 7 bodů.

Bonusovou druhou částí je nalezení způsobu, jak reprezentovat celá čísla (tedy i záporná) a popsat k nim operaci odčítání. Poradíme, že jestli zjistíte, jak převrátit znaménko u libovolného čísla, odčítání lze jednoduše odvodit z již popsaného sčítání. Za vyřešení bonusové části lze získat až 3 body navíc.